III. ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ

1. Общие правила комбинаторики

Комбинаторика – это раздел дискретной математики, который изучает способы подсчета числа элементов различных конечных множеств. Многие правила комбинаторики решаются с помощью двух основных правил: правила суммы и правила произведения.

Рассмотрим правило суммы. Пусть, например, в урне 3 красных шара. Тогда выбрать красный шар без возвращения можно 3 способами. Если в урне 3 красных и 2 белых шара, то выбрать красный или белый шар можно 3+2=5 способами. В общем случае, если объект A может быть выбран m способами, а объект B n способами при условии, что одновременный выбор A и B невозможен, то выбор « A или B» можно осуществить m+n способами.

Пример 1

Занятия по французскому языку посещают 15 студентов, по английскому – 20 студентов. Сколько студентов посещают занятия по французскому или английскому языкам, если известно, что эти занятия проходят в одно и то же время?

Ответ: 15+25=40 студентов.

Так как A и B несовместны, то такой подсчет числа возможностей соответствует определению числа элементов объединения двух непересекающихся конечных множеств, т.е. $|A\cup B|=|A|+|B|=m+n$ ($|A|=m$, $|B|=n$). В том случае, если есть совпадения в способах выбора объектов A и B, то число способов выбора « A или B» равно $m+n-k$, где k – число совпадений. И это соответствует определению числа элементов объединения двух множеств, имеющих непустое пересечение, т.е. $|A\bigcup B|=|A|+|B|-|A\bigcap B|=m+n-k$ ($|A|=m$, $|B|=n$, $|A\cap B|=k$).

Пример 2

Занятия по французскому языку посещают 15 студентов, по английскому – 20 студентов. Сколько студентов посещают занятия по французскому или английскому языкам, если известно, что эти занятия проходят в разное время и 7 студентов посещают занятия по французскому и английскому языкам?

Ответ: 15+25-7=33 студента.

Правило произведения. Пусть первый элемент можно выбрать m способами, а второй элемент n способами, причем число способов выбора второго элемента не зависит от того, как именно выбран первый элемент. Тогда пару элементов можно выбрать $m\cdot n$ способами. Правило произведения соответствует правилу подсчета числа элементов прямого произведения двух множеств, $|A\times B|=m\cdot n$.

Пример 3

Бросают две игральные кости разного цвета. Сколько существует результатов опыта? Каждая кость может упасть независимо от другой шестью способами.

Ответ: $6\cdot 6=36$.

Рассмотрим правило произведения в общем случае. Комбинация из k элементов называется k-расстановкой. В том случае, когда нужно составить не пары, а комбинации из большего числа элементов, приходим к следующей задаче: сколько можно составить k-расстановок, если первый элемент может быть выбран n_1 способами, второй n_2 способами, … k-й n_k способами? Всего по правилу определения числа элементов прямого произведения получается $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$ k-расстановок.

Пример 4

1. У велосипедистов есть суеверие: в нагрудном номере не должно быть цифры 8. Сколько человек участвовало в соревновании, если были розданы все трехзначные номера, не содержащие цифры 8. Ответ: $9\times 9\times 9=729$.

2. В урне 4 красных, 3 белых и 6 синих шаров. Сколькими способами можно достать последовательно 3 шара так, чтобы первым был вынут красный шар, вторым – белый, третьим – синий?

Ответ: $4\times 3\times 6=72$.

Формула включений и исключений. Пусть имеется N предметов, некоторые из которых обладают свойствами $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. При этом каждый предмет может не обладать ни одним свойством либо обладать одним или несколькими свойствами. Обозначим $N\left(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_k}\right)$ – количество предметов, обладающих свойствами $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_k}$, $k \le n$, и, может быть, еще некоторыми из свойств. Если надо указать, что берутся предметы, не обладающие некоторыми свойствами, то это свойство пишется со штрихом. Например, $N\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3'\right)$ – количество предметов со свойствами α_1, α_2, но не обладающих свойством α_3; $N\left(\alpha_1',\ldots,\alpha_n'\right)$ – число предметов, не обладающих ни одним из указанных свойств. Тогда справедливо равенство:

$$N\left(\alpha_1',\ldots,\alpha_n'\right) = N - N\left(\alpha_1\right) - N\left(\alpha_2\right) - \ldots - N\left(\alpha_n\right) + N\left(\alpha_1\alpha_2\right) + N\left(\alpha_1\alpha_3\right) + \ldots$$
$$N\left(\alpha_1\alpha_n\right) + \ldots + N\left(\alpha_{n-1}\alpha_n\right) - N\left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\right) - \ldots - N\left(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n\right) + \ldots$$
$$+(-1)^n N\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right).$$

Эта формула называется формулой включений и исключений – сначала исключаются предметы, обладающие хотя бы одним из свойств $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, затем включаются предметы, обладающие по крайней мере двумя из этих свойств, исключаются, имеющие 3 свойства и т.д.

Пример 5

В институте работают 90 сотрудников. Из них 47 человек знают английский язык, 35 – немецкий язык, 15 – французский язык, 8 человек знают английский и немецкий языки, 6 – английский и французский, 4 – немецкий и французский, а 3 человека знают все три языка. Сколько сотрудников не знают ни одного языка? Решение: по формуле включений и исключений находим 90-(47+35+15)+(8+6+4)-3=8. Ответ: 8 сотрудников не знают ни одного языка.

Эту задачу можно решить с помощью кругов Эйлера. На приведенном здесь рисунке пересекающиеся круги с пометками А, Н и Ф соответствуют английскому, немецкому и французскому языкам. Вся фигура состоит из множества непересекающихся областей, в каждой из которых указано соответствующее число сотрудников согласно условию задачи. Сумма всех чисел в этих областях равна 82. Отсюда находим искомое число сотрудников 90 – 82=8 .

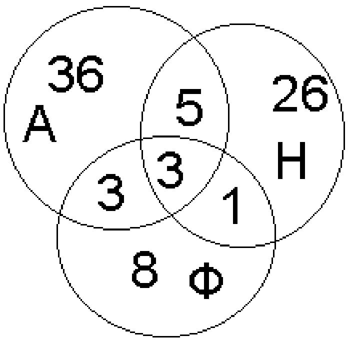


Рис. 3.1. Круги Эйлера

2. Размещения с повторениями

Предположим, что даны предметы, относящиеся к n различным видам. Из них делают всевозможные выборки по k элементов в каждой, т.е. k-расстановки. Мы будем рассматривать k-расстановки, которые отличаются друг от друга видом входящих в них элементов или порядком этих элементов. Если в такую расстановку могут входить элементы одного вида, то такие расстановки называются k-размещениями с повторениями из элементов n видов.

Пример 1

Пусть дано множество $A = \{a,b,c,d\}$. Рассмотрим 2-размещения с повторениями элементов из множества A. Такие расстановки имеют вид aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd,… всего 16 расстановок.

Теорема 2. Число k-размещений с повторениями из элементов n видов равно $\overline{A}_n^k = n^k$.

Доказательство. Первый элемент может быть выбран n способами, второй элемент – n способами… k-й элемент n – способами. Всего по правилу произведения будем иметь $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$.

Пример 1

1. Кодовый замок имеет на диске 12 букв. Секретное слово состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток можно сделать? Общее число комбинаций $\overline{A}_{12}^5 = 12^5 = 248832$. Число неудачных попыток 248832-1=248831.

2. Имеется конечное множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ из k элементов. Сколько может быть подмножеств данного множества? Рассмотрим произвольное подмножество $B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$, $l \le k$. Каждому такому подмножеству можно взаимно однозначно поставить в соответствие строки длины k из нулей и единиц. Если элемент принадлежит B, то на соответствующем месте ставится 1, в противном случае – 0. Таким образом, число подмножеств равно числу строк длины k из нулей и единиц. Строки длины k из нулей и единиц есть k-размещения из элементов 0 и 1, и их число равно 2^k. Значит, любое конечное множество содержит 2^k подмножеств, включая и пустое множество.

3. Размещения без повторений

Предположим, что имеется n различных предметов. Сколько из них можно составить k-расстановок ($k \le n$). При этом две расстановки считаются различными, если они либо отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, либо состоят из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке. Такие расстановки называются k-размещениями без повторений.

Теорема 3

Число k-размещений без повторений из n различных предметов равно $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное k-размещение без повторений. На первом месте у этого размещения может находиться любой из n предметов, поэтому первый элемент может быть выбран n способами. Так как повторения не допускаются, то второй по порядку элемент может быть выбран $(n-1)$ способами и т.д. Таким образом, по правилу произведения получаем $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Пример 1

Сколькими способами можно выбрать 3 из 10 различных шаров?

Ответ: $A_{10}^3 = \dfrac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

4. Перестановки

Пусть дано множество из n различных элементов. Размещения без повторений, в которые входят все элементы, называются n-перестановками.

Теорема 4. Число n-перестановок равно $P_n = A_n^n = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 = n!$.

Доказательство. Доказательство очевидно, т.к. n-перестановки являются частным случаем k-размещений без повторений из n различных предметов при $k = n$.

Пример 1

Сколькими способами можно расположить на полке 10 различных книг?

Ответ: 10! .

Замечание. При решении задач возникают ситуации, когда некоторые перестановки совпадают. Это следует учитывать при подсчете числа перестановок.

Пример 2

1. Сколькими различными способами могут встать в круг 7 девушек? Ответ: $P_7 = 7! = 5040$. Но если они начинают водить хоровод, то становится важным лишь их взаимное расположение, а не положение относительно предметов. В этом случае перестановки, переходящие одна в другую при вращении, считаем одинаковыми. Поэтому число способов равно $5040 : 7 = 720$.
2. Сколькими способами из 7 различных бусин можно составить ожерелье? Число способов определяем как в предыдущем случае, но если учесть, что ожерелье можно перевернуть, то получаем $720 : 2 = 360$.

5. Перестановки с повторениями

В предыдущем разделе мы рассматривали перестановки из n различных предметов. В том случае, если некоторые переставляемые предметы совпадают, то число перестановок будет меньше. Предположим, что имеется k различных типов предметов и известно, что имеется n_1 элементов 1-го типа, n_2 элементов 2-го типа, … n_k элементов k-го типа. При этом $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Перестановки такого типа будем называть
n-перестановками с повторениями. Для числа таких перестановок существует обозначение

$$P\left(n_1, n_2, \ldots, n_k\right).$$

Теорема 4 $P\left(n_1, n_2, \ldots, n_k\right) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную перестановку из n элементов. В этой перестановке элементы 1-го типа можно переставить $n_1!$ способами и ничего не изменится. Аналогичные утверждения можно сделать про другие типы элементов. Таким образом, $n_1! n_2! \ldots n_k!$ перестановок ничего не меняют. Если бы повторений элементов не было, то было бы $n!$ перестановок. Но повторения уменьшают число перестановок в $n_1! n_2! \ldots n_k!$ раз.

Пример 1

Дано слово из 9 букв МИССИСИПИ. Сколько существует способов перестановки букв в этом слове? В этом слове буква М встречается 1 раз, буква И – 4 раза, буква С – 3 раза, П – 1 раз. Всего получается $P\left(1,4,3,1\right) = \dfrac{9!}{1!4!3!1!} = 2520$.

6. Сочетания без повторений

Пусть имеются n различных элементов. k-сочетаниями без повторений из n элементов называют k-расстановки, составленные из этих элементов, и отличающиеся друг от друга составом, но не порядком элементов. Число k-сочетаний без повторений из n различных элементов обозначается C_n^k.

Пример 1.

Пусть дано множество $A = \left\{a, b, c, d\right\}$. Рассмотрим 2-сочетания с повторениями элементов из множества A. Всего получается шесть 2-сочетаний без повторений: $ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd$.

Теорема 5. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$.

Доказательство. Составим всевозможные k-сочетания из n элементов, а затем переставим их всеми возможными способами. При этом получим все k-размещения из n элементов без повторения.

Из каждого k-сочетания можно сделать $k!$ перестановок элементов, т.е. $k!C_n^k = A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Следовательно, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Эта формула совпадает с формулой для числа n-перестановок из k элементов одного типа и $(n-k)$ элементов другого типа $P(k,n-k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$.

Пример 2.

Сколькими способами можно выбрать при игре в спортлото 6 из 49 номеров?

Ответ: $C_{49}^6 = \dfrac{49!}{6!43!} = 69919080$.

7. Сочетания с повторениями

Пусть имеется n различных типов предметов. Сколько k-расстановок можно составить, которые отличаются друг от друга составом, но не порядком входящих элементов? Такие k-расстановки называются k-сочетаниями с повторениями из n типов предметов. Число k-сочетаний с повторениями из n типов предметов обозначается $\overline{C}_n^k$.

Теорема 6. $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

Доказательство. Каждой k-расстановке поставим в соответствие последовательность из единиц и нулей следующим образом. В этой последовательности для каждого типа предметов будем ставить столько единиц, сколько предметов этого типа присутствует в k-расстановке. Единицы, соответствующие различным типам, будем отделять нулями.

Например, если имеется n типов предметов $a_1,\ a_2\ ,\ldots,a_n$, то k-расстановке

$$\underbrace{a_1,\ldots,a_1}_{p_1}\underbrace{a_2,\ldots,a_2}_{p_2},\ldots,\underbrace{a_2\ ,\ldots,a_2}_{p_l},$$

где $p_1 + p_2 + \ldots + p_l = k$, ставим в соответствие последовательность из единиц и нулей $\underbrace{1\ldots1}_{p_1}0\underbrace{1\ldots1}_{p_2}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{p_l}$, в которой k единиц и $(n-1)$ нулей, всего $k+n-1$ элементов. Число таких $k+n-1$-расстановок равно числу перестановок с повторениями из элементов двух типов

$$P(k,n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k = \overline{C}_n^k.$$

Пример 1

1. В кондитерской продавалось 4 вида пирожных: наполеоны, эклеры, песочные, слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Ответ: $\overline{C}_4^7 = \dfrac{10!}{7!3!}$.

2. Число k-сочетаний с повторениями из n типов предметов есть число решений $(x_1,\ldots,x_n)$ уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

в неотрицательных целых числах.

8. Свойства сочетаний

Числа сочетаний C_n^k называются биномиальными коэффициентами, потому что они совпадают с коэффициентами разложения по формуле бинома Ньютона $\left(a+b\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$.

Приведем некоторые свойства сочетаний, доказательство которых несложно и предлагается выполнить в качестве упражнения:

1) $C_n^k=C_n^{n-k}$;
2) $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$;
3) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$;
4) $C_n^k\cdot C_{n-k}^{m-k}=C_m^k\cdot C_n^m$.

IV. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

1. Основные понятия и определения

Граф G есть совокупность конечного непустого множества V и заданного множества X, состоящего из неупорядоченных пар различных элементов из V. При этом используют обозначение $G\left(V,X\right)$.

Элементы множества V называются вершинами. Каждую пару x из множества X называют ребром и говорят, что x соединяет вершины $u,v\in V$. В таком случае мы будем писать $x=uv$ и говорить, что u и v смежные вершины. Графически ребра принято изображать отрезками линий (не обязательно прямых), а вершины – точками на концах отрезка, см. рис. 4.1.

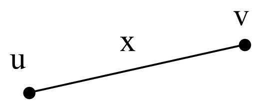


Рис.4.1. Ребро x и смежные вершины u, v

Про вершину u и ребро x говорят, что они инцидентны. Вершина v и ребро x также инцидентны. Если ребра инцидентны одной вершине, то они называются смежными.

Если ребро ориентировано, то оно называется дугой. Ребро вида $x = uu$ называется петлей. На рис. 4.2 приведены примеры дуги и петли

Рис. 4.2. Дуга и петля

Неориентированное ребро называется звеном.

Униграф – это такой граф, в котором любые две его вершины соединены не более чем одним ребром.

Мультиграф – это такой граф, в котором не допускаются петли, но пары вершин могут соединяться более чем одним ребром, см. рис. 4.3.

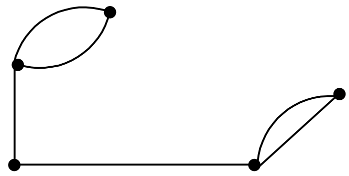


Рис. 4.3. Мультиграф

Если допускаются петли и кратные ребра, то такой граф называется псевдографом.

Орграф – это граф, состоящий из конечного непустого множества вершин V и заданного набора X ориентированных ребер. В орграфе нет петель и кратных дуг.

Граф, не содержащий дуг (ориентированных ребер), называют неориентированным графом или неорграфом.

Степенью вершины v называется число ребер, инцидентных v. При этом петли считаются дважды. Степень вершины обозначается $\deg(v)$. Вершина v изолирована, если $\deg(v) = 0$. Так как каждое ребро инцидентно двум вершинам, то в сумму степеней вершин графа каждое ребро вносит двойку.

Отсюда следует следующая теорема.

Теорема 1(Эйлера). Сумма степеней вершин графа G равна удвоенному числу его ребер

$$\sum_i \deg(v_i) = 2q .$$

Следствие. В конечном графе число вершин нечетной степени четно.

Полный граф – это граф, в котором любые две вершины соединены ребром.

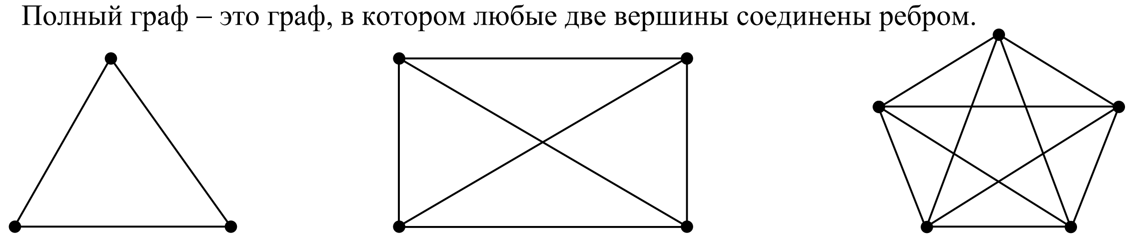


Рис.4.4. Примеры полных графов.

Маршрутом S в графе G называется конечная последовательность ребер $x_i \in X$, $i = 1,\ldots,l$ вида $S = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{l-1}, v_l$, для которой $x_1 = v_0v_1$, $x_2 = v_1v_2$,…

$x_l = v_{l-1}v_l$. Число ребер в маршруте называется длиной маршрута.

Маршрут, в котором нет повторяющихся ребер, называется цепью. Если в цепи совпадают начальная и конечная вершины, то такая цепь называется циклом.

Цепи и циклы называются простыми, если в них нет повторяющихся вершин. Две вершины u, v называются связанными, если существует маршрут S , в котором концами являются u и v . Граф называется связным, если в нем любые вершины связаны. Связный граф без циклов называется деревом (см. рис. 4.5).

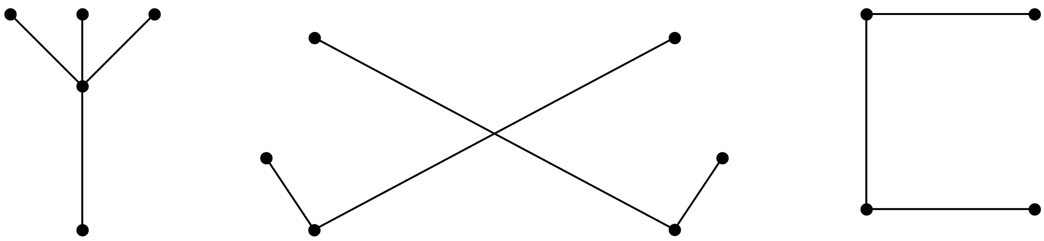


Рис. 4.5. Примеры деревьев.

Совокупность k деревьев называется k -лесом.

Граф $G'(V',X')$ называется подграфом графа $G(V,X)$, если $V' \subseteq V$ и $X' \subseteq X$. Если G связный граф, то подграф графа G , у которого $V' = V$ и который является деревом называется остовом графа G .

Разрез связного графа – это множество ребер, удаление которых приводит к несвязному графу.

2. Матрицы инциденций и смежности

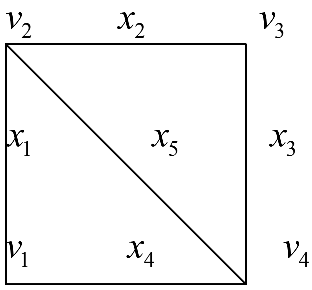
Пусть дан граф $G(V,X)$, $|V| = p$, $|X| = q$.

Матрицей инциденций графа G называется $p \times q$ матрица $B = \{b_{ij}\}$, элементы которой определяются по формуле

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \text{ и } x_j \text{ инцидентны,} \\ 0, & \text{если } v_i \text{ и } x_j \text{ не инцидентны.} \end{cases}$$

Пример1

Пусть дан граф $G(V,X)$, изображенный на рис. 4.6. Справа от него дана соответствующая матрица инциденций.



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
v1	1	0	0	1	0
v2	1	1	0	0	1
v3	0	1	1	0	0
v4	0	0	1	1	1

Рис. 4.6. Граф и соответствующая ему матрица инциденций

Матрица инциденций определяет граф с точностью до изоморфизма, т.е. по матрице инциденций можно построить граф, в котором соответствующие вершины и ребра будут сохранять отношение смежности. С другой стороны, два графа изоморфны, если у них совпадают матрицы инциденций с точностью до перестановок строк и столбцов. В матрице инциденций связного графа любые $p-1$ строк однозначно определяют граф, так как недостающая строка есть их сумма по модулю 2. Ранг матрицы инциденций связного графа равен $p-1$.

Компонентой связности графа называется связный подграф, который не принадлежит ни одному большему связному подграфу. Если граф имеет несколько компонент связности, то при соответствующей нумерации вершин и ребер графа матрица инциденций имеет блочно-диагональный вид. При этом подматрицы на главной диагонали соответствуют компонентам связности графа.

Теорема 1. Ранг матрицы инциденций r компонентного графа равен $p-r$.

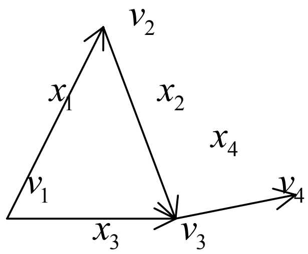
Доказательство теоремы основано на том, i -я компонента графа имеет ранг p_i-1.

Элементы матрицы инциденций ориентированного графа определяются по формуле

$$b_{ij}=\begin{cases} 0, & \text{если вершина } v_i \text{ не инцидентна дуге } x_j, \\ +1, & \text{если дуга } x_j \text{ ориентирована от вершины } v_i, \\ -1, & \text{если дуга } x_j \text{ ориентирована к вершине } v_i. \end{cases}$$

Пример 2

Ниже на рис. 4.7. дано изображение ориентированного графа и приведена соответствующая ему матрица инциденций



	x_1	x_2	x_3	x_4
v_1	1	0	1	0
v_2	-1	1	0	0
v_3	0	-1	-1	1
v_4	0	0	0	-1

Рис. 4.7. Ориентированный граф и соответствующая ему матрица инциденций

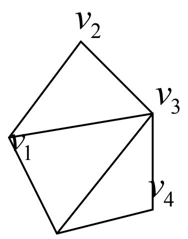
Матрицей смежности графа $G(V,X)$ называется $p\times p$ матрица $A=\{a_{ij}\}$, элементы которой определяются по формуле

G_2

Так как для неориентированного графа отношение смежности симметрично, то матрица смежности симметрична. Существует взаимно однозначное соответствие между графами с p вершинами и симметричными бинарными $p\times p$ матрицами с нулями на диагонали. Суммы элементов по строкам и столбцам неориентированного графа равны степеням соответствующих вершин графа.

Пример 3

На рис. 4.8. дано изображение неориентированного графа, справа от него соответствующая матрица смежности.



$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

v_5

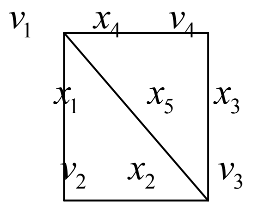
Рис. 4.8. Неориентированный граф и соответствующая матрица смежности

Теорема 2. Пусть дан граф $G(V,X)$ с матрицей смежности A. Тогда (i,j)-й элемент матрицы A^n равен числу маршрутов длины n из v_i в v_j.

Теорема 3. (Матричная теорема о деревьях). Пусть G связный граф с матрицей смежности A. M – матрица, полученная из $-A$ заменой i-го элемента главной диагонали на $\deg(v_i)$. Тогда все алгебраические дополнения матрицы M равны между собой и их общее значение равно числу остовов G.

Пример 4

На рис. 4.9. дано изображение графа и все 8 его остовов.



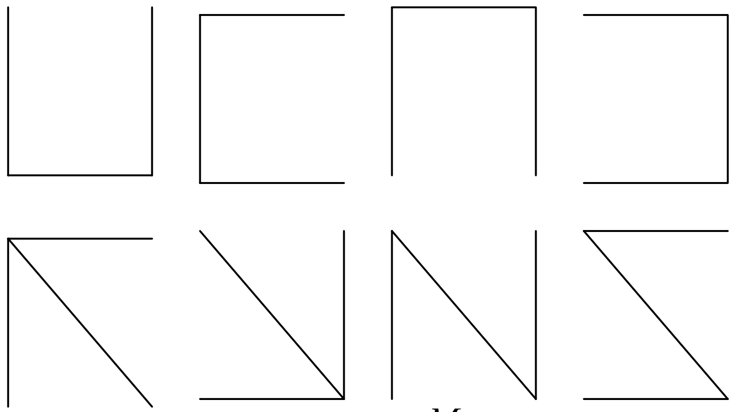


Рис. 4.9. Граф и его остовы.

Можно проверить, что все алгебраические дополнения M равны 8. Возьмем, например, алгебраическое дополнение элемента m_{23}

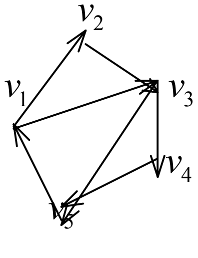
$$(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \ .$$

Матрица смежности орграфа определяется аналогично

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если дуга } v_i v_j \text{ принадлежит } X, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пример 5

На рис. 4.10. дано изображение ориентированного графа, справа от него соответствующая матрица смежности



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 4.10. Ориентированный граф и соответствующая матрица смежности

Полустепень исхода есть число ребер, исходящих из v. Полустепень захода есть число ребер, есть число ребер, входящих в v. В матрице смежности ориентированного графа сумма элементов по строке равна полустепени исхода вершины, сумма элементов по столбцу – полустепени захода вершины.

3. Бинарные операции над графами

Пусть даны два графа $G_1(V_1, X_1)$ и $G_2(V_2, X_2)$. Рассмотрим бинарные операции над графами G_1 и G_2.

Операция объединения. Граф $G(V, X)$ является объединением G_1 и G_2 и обозначается $G = G_1 \bigcup G_2$, если $V = V_1 \bigcup V_2$ и $X = X_1 \bigcup X_2$.

Операция пересечения. Граф $G(V, X)$ является пересечением G_1 и G_2 и обозначается $G = G_1 \cap G_2$, если $V = V_1 \cap V_2$ и $X = X_1 \cap X_2$.

Соединение графов. Соединение графов состоит из $G_1 \bigcup G_2$ и всех ребер, соединяющих X_1 и X_2. Соединение обозначается $G_1 + G_2$.

Пример 1

На рис. 4.11 изображены графы G_1 и G_2 и их соединение.

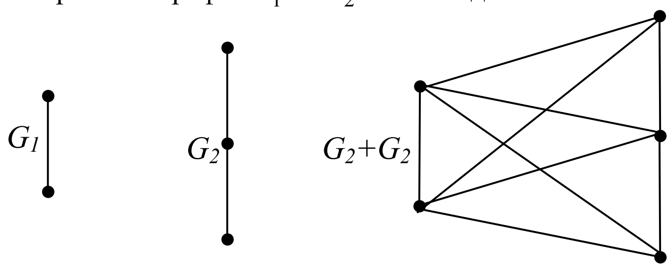


Рис. 4.11. Соединение графов G_1 и G_2.

Декартово произведение. Граф $G(V, X)$ есть декартово произведение G_1 и G_2 и обозначается $G = G_1 \times G_2$, если

а) $V = V_1 \times V_2$;

б) смежность вершин G определяется следующим образом. Пусть $V_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $V_2 = \{u_1, \ldots, u_m\}$. Тогда

$$V = \{(v_1, u_1), (v_1, u_2), \ldots, (v_n, u_m)\} = \{z_1, \ldots, z_{n \cdot m}\}.$$

Вершины $z_i = (v_{i_1}, u_{i_2})$ и $z_j = (v_{j_1}, u_{j_2})$ смежны тогда и только тогда, когда $v_{i_1} = v_{j_1}$ и u_{i_2} смежна с u_{j_2} или $u_{i_2} = u_{j_2}$ и v_{i_1} смежна с v_{j_1}.

Пример 2

Пусть даны два графа G_1 и G_2, изображенные на рис. 4.12.

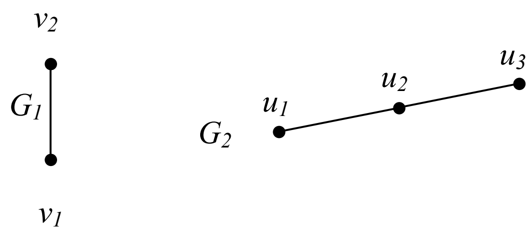


Рис. 4.12. Графы G_1 и G_2

Определим множество вершин декартового произведения
$V=\{(v_1,u_1),(v_1,u_2),(v_1,u_3),(v_2,u_1),(v_2,u_2),(v_2,u_3)\}=\{z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6\}$.

Декартовым произведением G_1 и G_2 является граф, изображенный на рис.4.13.

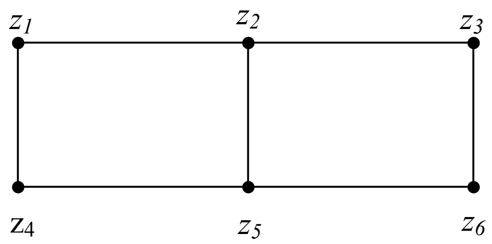


Рис.4.13. Декартово произведение графов G_1 и G_2.

Операция композиции. Граф $G(V,X)$ есть композиция G_1 и G_2 и обозначается $G=G_1[G_2]$, если

а) $V=V_1\times V_2$;

б) смежность вершин G определяется следующим образом. Вершины $z_i=(v_{i_1},u_{i_2})$ и $z_j=(v_{j_1},u_{j_2})$ смежны тогда и только тогда, когда v_{i_1} смежна с v_{j_1} или $v_{i_1}=v_{j_1}$ и u_{i_2} смежна с u_{j_2}. Композицией графов G_1 и G_2 из примера 2 является граф, представленный на рис. 4.14.

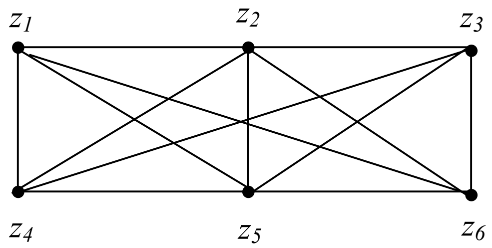


Рис.4.14. Композиция графов G_1 и G_2

Литература

1. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера.- М.: Энергоатомиздат, 1988.- 476 с.
2. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.- М.: Наука, 1984.- 223 с.
3. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике.- М.: Наука, 1977.- 367 с.
4. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику.- М.: Наука,1979.-272с.
5. Оре О. Теория графов.- М.: Наука, 1968.
6. Харари Теория графов.-М.: Мир 1973.
7. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов.- СПб: Питер, 2001.-304с.

Содержание